数学　問題・解答用紙　<No.1>

1　(40 点)

次の $\boxed{}$ をうめよ。

(1)　方程式 $7x-y=5x-2y=9$ の解は $x=\boxed{1}$，$y=\boxed{-2}$ である。

(2)　太郎君が先生に，太郎君が解いた 2 次方程式についての話をしている。

太郎「 黒板に書かれていた方程式は，左辺がxの 2 次式で x^2の係数は 2 でした。右辺は 0 でした。ノートに式を書き写して方程式を解いたら，解が $x=1,\ \frac{3}{2}$ と求まりました。正しい答えをみると，$x=1$ は解でしたが，$x=\frac{3}{2}$ は解ではありませんでした。

見直しをしていると，式を写し間違えていることに気づきました。xの係数と定数項を逆にして，ノートにはxの係数を $\boxed{-5}$，定数項を $\boxed{3}$ と書いてしまったのです。訂正して解き直すと，正しい答えになりました。しかし，写し間違えた式の方の答えも気になるので教えてください。」

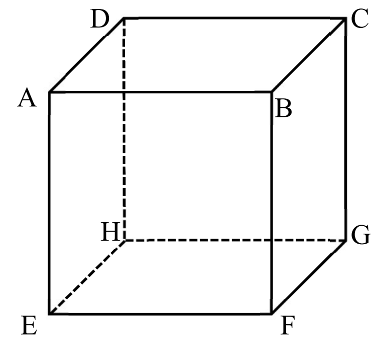
先生「 $x=1,\ \frac{3}{2}$ で合っていますね。写し間違いには注意しましょう。」

黒板に書かれていた方程式の解は $x=1,\ \boxed{-\frac{5}{2}}$ である。

(3)　a のとる値の範囲が $-4 \leqq a \leqq -2$ のとき，$b=a+1$ と定めると，b のとる値の範囲は $\boxed{-3 \leqq b \leqq -1}$ である。このとき，$c=b^2$ と定め，さらに $d=\frac{1}{c}$ と定めると，d のとる値の範囲は $\boxed{\frac{1}{9} \leqq d \leqq 1}$ である。

(4)　1辺の長さが 5 の立方体 ABCD-EFGH がある。辺 AB，AD 上にそれぞれ点 P，Q を AP = 2，AQ = 2 となるようにとる。

このとき，PQ = $\boxed{2\sqrt{2}}$，QE = $\boxed{\sqrt{29}}$，EP = $\boxed{\sqrt{29}}$ であり，△EPQ の面積は $\boxed{3\sqrt{6}}$ である。また，3 点 E，P，Q を通る平面を K としたとき，K に垂直で A を通る直線と K の交点を L とすると，AL = $\boxed{\frac{5}{9}\sqrt{6}}$ である。



受験番号		小計	

数学　問題･解答用紙　＜No.2＞

2　(15 点)

0, 1, 2, 3, 4, 5 の中から異なる 3 個の数字を選び, 横に一列に並べて 3 桁の整数をつくる。

次の問いに答えよ。

(1)　つくることができる 3 桁の整数は何個あるか求めよ。

(2)　つくることができる 3 桁の整数のうち 430 以上の整数は何個あるか求めよ。

(3)　つくることができる 3 桁の整数のうち 6 の倍数は何個あるか求めよ。

(1) 百の位の選び方は 5 通り。
百の位を定めたとき, 十の位の選び方は 5 通り。
百と十の位を定めたとき, 一の位の選び方は 4 通り。
よって, $5\times5\times4=100$ (個) ･･･(答)

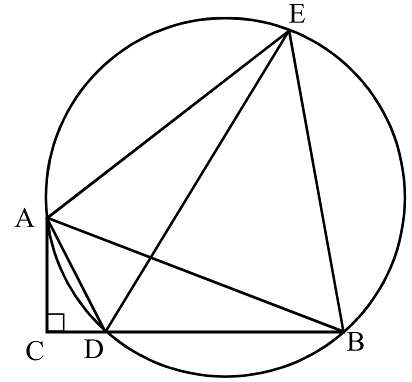
(2) 百の位が 5 のとき, 十と一の位の選び方は 5×4 通り。
百の位が 4 のとき, 十の位は 3 か 5 で, それぞれ一の位は 4 通り。
よって, $5\times4+2\times4=28$ (個) ･･･(答)

(3) 2 の倍数かつ 3 の倍数であれば 6 の倍数である。
2 の倍数だから, 一の位は 0, 2, 4 のいずれか
3 の倍数だから, 各位の数を足すと 3 の倍数
一の位が 0 のとき, 足すと 3 の倍数になる百の位と一の位の選び方は
12, 15, 21, 24, 42, 45, 51, 54
よって, 8 通り。
一の位が 2 のとき, 足すと 3 の倍数になる百の位と一の位の選び方は
10, 13, 31, 34, 40, 43
よって, 6 通り。
一の位が 4 のとき, 足すと 3 の倍数になる百の位と一の位の選び方は
20, 23, 32, 35, 50, 53
よって, 6 通り。
以上より, 6 の倍数の個数は, $8+6+6=20$ (個) ･･･(答)

3　(15 点)

図のように, ∠C＝90° の直角三角形 ABC の辺 BC 上に点 D があり, 四角形 ADBE のすべての頂点が 1 つの円周上にあるとする。

AB＝7, AD＝3, BD＝5, AE＝BE のとき, 次の問いに答えよ。



(1)　線分 CD の長さを求めよ。

(2)　∠ADBの大きさを求めよ。解答欄には答えのみを記せ。

(3)　四角形 ADBE の面積を求めよ。

(1) $CD=x$ とする。$BC=x+5$ と表せる。
△ADC と△ABC で三平方の定理を用いて,
$$AC^2+CD^2=AD^2,\quad AC^2+BC^2=AB^2$$
よって,
$$AC^2=AD^2-CD^2=AB^2-BC^2$$
$$9-x^2=49-(x+5)^2$$
$$10x=15$$
$$x=\frac{3}{2}$$
よって,
$$CD=\frac{3}{2}$$ ･･･(答)

(2)　120°

(3) △ABE は二等辺三角形だから $\angle ABE=\angle BAE$
円周角の定理より $\angle ABE=\angle ADE$, $\angle BAE=\angle BDE$ だから, $\angle ADE=\angle BDE$
(2)より $\angle ADE+\angle BDE=120^\circ$ だから, $\angle ADE=\angle BDE=60^\circ$
よって, $\angle ABE=\angle BAE=60^\circ$ だから, △ABE は正三角形で $EA=EB=AB=7$
AB の中点を M とすると $AB\perp EM$ だから, △AEM で三平方の定理を用いて
$$EM^2=AE^2-AM^2=7^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49\times3}{4}$$ より, $EM=\frac{7}{2}\sqrt{3}$
△ADC で三平方の定理を用いて, $AC^2=3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{27}{4}$ より, $AC=\frac{3}{2}\sqrt{3}$
求める面積は, $\triangle ABE+\triangle ABD=\frac{1}{2}\times7\times\frac{7\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times5\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}$ ･･･(答)

受験番号		小計	

数学　問題・解答用紙　＜No.3＞

4　(15 点)

$a>1$ とする。xy 平面上に4点A, B, C, Dがある。点Aは関数 $y=ax^2$ $(x>0)$ のグラフ上にあり，点Bは関数 $y=\dfrac{1}{a}x^2$ $(x>0)$ のグラフ上にある。点Cは y 軸上にあり，C の y 座標は正である。点Dは x 軸上にあり，D の x 座標は正である。

次の問いに答えよ。

(1)　直線 $y=-x+b$ 上に 4 点 A, B, C, D があるとする。2 点 A, B が線分 CD を 3 等分するとき，a, b の値をそれぞれ求めよ。

(2)　原点を中心とする 1 つの円周上に 4 点 A, B, C, D があるとする。2 点 A, B が弧 CD を 3 等分するとき，a^2 の値と，この円の面積を求めよ。

(1) 軸と直線の交点が C, D だから，$b>0$で，$C(0,b)$, $D(b,0)$

$a>1$ だから，直線上で C, A, B, D の順に並ぶ。

A, B は線分 CD を 3 等分するから，$A\left(\dfrac{1}{3}b,\dfrac{2}{3}b\right)$，$B\left(\dfrac{2}{3}b,\dfrac{1}{3}b\right)$

A は $y=ax^2$ の上の点だから，$\dfrac{2}{3}b=a\times\dfrac{1}{9}b^2$ より，$a=\dfrac{6}{b}$

よって，B は $y=\dfrac{b}{6}x^2$ 上の点だから，$\dfrac{1}{3}b=\dfrac{b}{6}\times\dfrac{4}{9}b^2$

$b>0$ より，両辺を b で割って $\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{27}b^2$ だから，$b^2=\dfrac{9}{2}$

よって，$b=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

このとき，$a=6\times\dfrac{1}{b}=6\times\dfrac{\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$

以上より，$a=2\sqrt{2}$，$b=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ ・・・(答)

(2) 円の半径を r とする。軸と円の交点が C, D だから $C(0,r)$, $D(r,0)$

$a>1$ だから，円周上で C, A, B, D の順に並ぶ。

A, B は弧 CD を 3 等分するから，$\angle COA=\angle AOB=\angle BOD=30^\circ$

また，$OA=OB=OC=OD$ だから，△AOD と△BOC は正三角形。

OD の中点を M とすると △OAM は直角三角形。また，$OM=\dfrac{1}{2}r$

△OAM で三平方の定理を用いて，$AM^2=OA^2-OM^2=r^2-\dfrac{1}{4}r^2=\dfrac{3}{4}r^2$

よって，$AM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r$ だから，$A\left(\dfrac{1}{2}r,\dfrac{\sqrt{3}}{2}r\right)$，同様にして $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}r,\dfrac{1}{2}r\right)$

A は $y=ax^2$ 上の点だから，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}r=a\times\dfrac{1}{4}r^2$ より，$a=\dfrac{2\sqrt{3}}{r}$

よって，B は $y=\dfrac{r}{2\sqrt{3}}x^2$ 上の点だから，$\dfrac{1}{2}r=\dfrac{r}{2\sqrt{3}}\times\dfrac{3}{4}r^2$

$r>0$ より両辺を r で割って $\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4\sqrt{3}}r^2$ だから，$r^2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

このとき，$a^2=\dfrac{12}{r^2}=\dfrac{36}{4\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$ で，円の面積は $\pi r^2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\pi$

以上より，$a^2=3\sqrt{3}$，円の面積は $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\pi$

受験番号		小計	

数学　問題･解答用紙　＜No.4＞

5　(15 点)

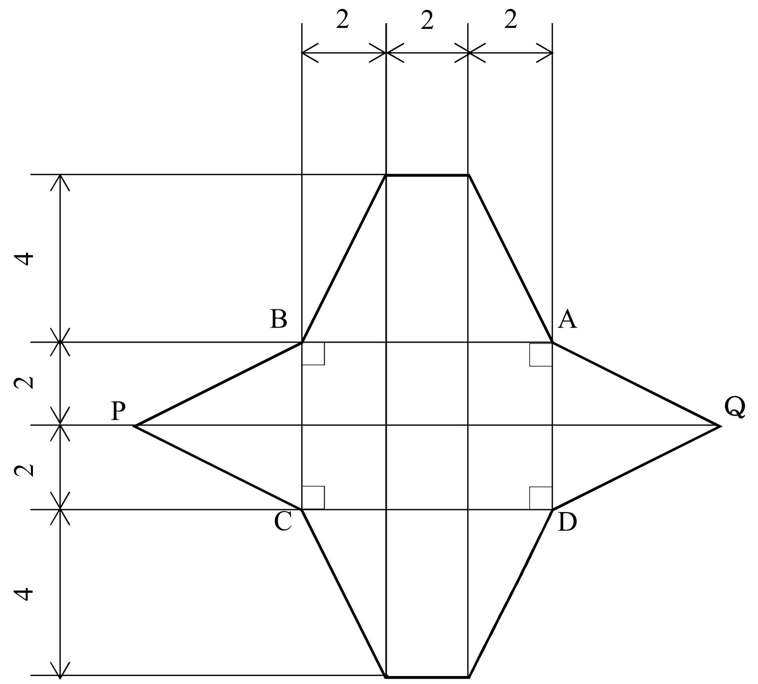
長方形 ABCD が底面で，2 つの合同な二等辺三角形と 2 つの合同な台形が側面の 5 面体 PQ-ABCD がある。下の図は，この 5 面体の展開図である。

次の問いに答えよ。

(1)　5 面体の 2 つの頂点 A，P を結んだ線分 AP の長さを求めよ。

(2)　5 面体の体積を求めよ。

(3)　底面が床に接するように 5 面体を床に置き，辺 AD を回転の軸として面 ADQ が床に接するまで回転させた。このとき，底面が回転してできた立体の体積を求めよ。



(1) 線分 AB を 3 等分する点のうち，B に近い方を E とする。

$AE = PE = 4$ で，△APE は直角三角形だから，三平方の定理より，

$AP^2 = AE^2 + PE^2 = 4^2 + 4^2 = 32$

$AP = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

(2) 線分 CD を 3 等分する点のうち，C に近い方を F とすると，H は EF の中点である。

$PE = 4$，$EH = 2$ で，△AEH は直角三角形だから，三平方の定理より，

$PH^2 = PE^2 - EH^2 = 4^2 - 2^2 = 12$

$PH = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

P を通り AB に垂直な平面と，Q を通り AB に垂直な平面で 5 面体を切る。

2 つの四角錐と 1 つの三角柱ができる。

四角錐の体積は，$2 \times 4 \times 2\sqrt{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$

三角柱の体積は，$4 \times 2\sqrt{3} \times \dfrac{1}{2} \times 2 = 8\sqrt{3}$

よって，5 面体の体積は，$\dfrac{16\sqrt{3}}{3} \times 2 + 8\sqrt{3} = \dfrac{56\sqrt{3}}{3}$

(3) 線分 AD の中点を M とする。

面 ADQ と底面の間の角は $\angle QMH$ と等しい。

QM，QH の長さは，どちらも PE の長さと等しい。

よって，$QM = QH = EH = 4$ だから △QMH は正三角形で，$\angle QMH = 60^\circ$

$\angle QMH$ の外角は $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

よって，AD を軸に回転させたとき，底面は120°回転する。

回転してできる立体は，

中心角120°，半径 6 の扇形が底面で，高さ 4 の柱

よって，体積は，

$6^2\pi \times \dfrac{120}{360} \times 4 = 48\pi$

受験番号		小計		合計	