数学　問題･解答用紙　＜No.1＞

1 （30 点）

次の ☐ をうめよ。

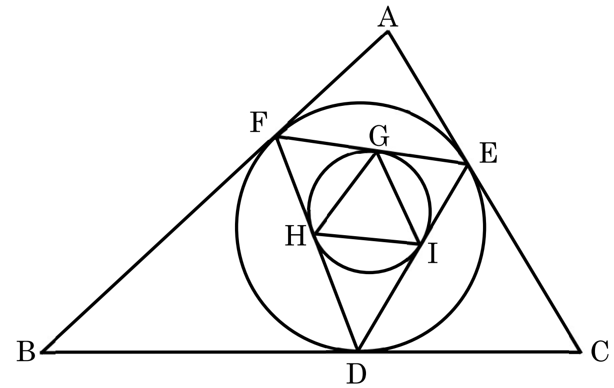
(1) $y^2 - x^2 - x^2y^2 + 1$　を因数分解すると $(1-x)(1+x)(1+y^2)$ である。

(2) 正多角形がある。この正多角形の 1 つの内角は，その隣りの外角の 7 倍の大きさである。この多角形は，正 16 角形である。

(3) 赤玉が 1 個，青玉が 2 個，白玉が 2 個入っている袋の中から 3 個の玉を同時に取り出すとき，3 個の玉の色が 2 種類となる確率を求めると $\frac{3}{5}$ である。

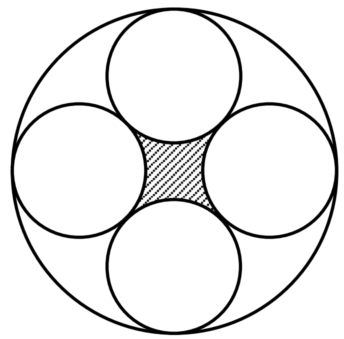
(4) 下の図のように，△ABC とその内接円の接点を D，E，F とする。さらに△DEF とその内接円の接点を G，H，I とする。

∠HGI＝a°　のとき，∠A の大きさを a を用いて表すと $4a-180$ °である。



(5) 半径 $1+\sqrt{2}$ の円の内側に同じ大きさの 4 つの円が，下の図のように接している。

斜線部分の面積は $4-\pi$ である。



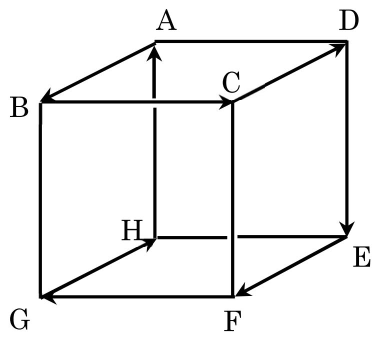
受験番号		小計	

数学 問題･解答用紙 ＜No.2＞

2 (15 点)

一辺の長さが 3 の立方体 ABCD - HGFE がある。点 P はサイコロの出た目の数だけ頂点を A→B→C→D→E→F→G→H→A→B→…の順に移動する。

初め点 P は頂点 A にある。1 つのサイコロを投げて，移動して止まった頂点を X とする。さらにもう 1 回投げて，点 X から移動して止まった頂点を Y とする。



サイコロを 2 回投げるとき，例えば，1 回目のサイコロの目が 1 で，2 回目のサイコロの目が 5 のとき，(1, 5)で表すことにする。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 目の出方が(5, 6)のとき，△AXY の面積を求めよ。

(2) 3 点 A, X, Y を結んで三角形ができない目の出方をすべて求めよ。

(3) 3 点 A, X, Y を結んで正三角形ができる目の出方をすべて求めよ。

(1) X は頂点 F, Y は頂点 D なので

△AXY＝△AFD＝ $\frac{1}{2}\times 3\times 3\sqrt{2}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$

(2) 三角形ができない目の出方は，X, Y のどちらかが A になる場合なので

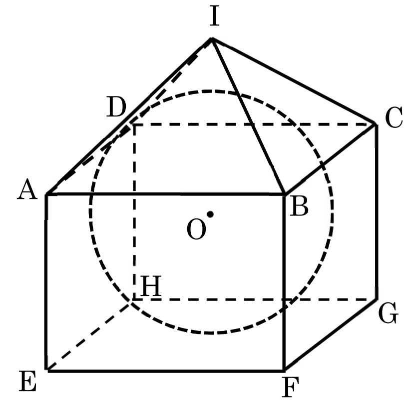
(2, 6)，(3, 5)，(4, 4)，(5, 3)，(6, 2)の 5 組である。

(3) 正三角形になるのは(2, 2)，(2, 4)，(4, 2)，(4, 6)，(6, 4)，(6, 6)の 6 組である。

3 (15 点)

右の図のように，正四角柱 ABCD-EFGH と正四角錐 I-ABCD を組み合わせた九面体があり，その九面体のすべての面に球が接している。また，球の中心を O とする。

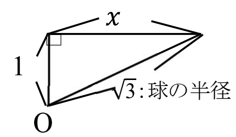
$AE=1+\sqrt{3}$，$AB=2\sqrt{3}$ であるとき，次の問いに答えよ。



(1) 球を面 ABCD で切断したとき，球の断面積を求めよ。

(2) 線分 OI の長さを求めよ。

(1)点 O と面 ABCD の距離は $1+\sqrt{3}-\sqrt{3}=1$



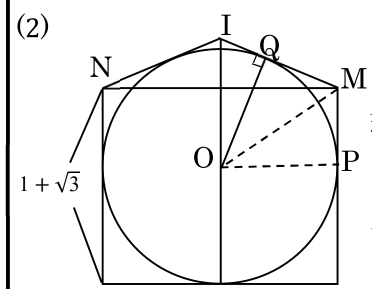
xを断面の円の半径とすると左の図で

三平方の定理より $(\sqrt{3})^2=1^2+x^2$

$x^2=2$

求める断面積は 2π である。

(2)



辺 AD, BC の中点をそれぞれ N, M とする。

この立体の球の面 OMN による切断面を考える

球と面 BFGC, BCI の接点をそれぞれ P, Q とする

左の図より $OP=\sqrt{3}$，$MP=1$

△OPM は直角三角形で $OP:PM=\sqrt{3}:1$ より

∠MOP=30°

また△OPM≡△OQM(3 辺相等)より∠MOQ＝30°

故に ∠IOQ=30°

△OQI は∠OQI=90° の直角三角形であり

∠IOQ=30° $OQ=OP=\sqrt{3}$ よって OI=2

受験番号		小計	

数学　問題・解答用紙　＜No.3＞

4 (20 点)

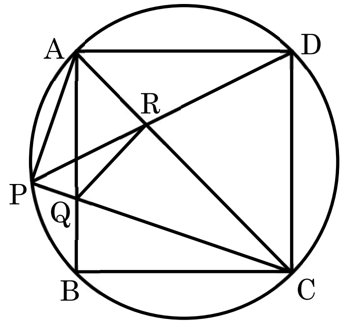
一辺の長さが 5 の正方形 ABCD が円に内接している。図の点 P は弧 AB 上の点，点 Q は直線 AB と PC の交点，点 R は直線 AC と PD の交点である。

次の(1)，(2) を証明し，(3)に答えよ。

(1) 4 点 A，P，Q，R が同一円周上にある。

(2) △AQR は直角二等辺三角形である。

(3) AP＝1 のとき，線分 QR の長さを求めよ。



(1)　正方形 ABCD において対角線 AC は∠BAD を 2 等分するから

∠BAC=∠DAC=45°

この円において弧 CD に対し円周角の定理より

∠DPC=∠DAC　即ち　∠DPC=∠BAC

よって　円周角の定理の逆より　4 点 A，P，Q，R は同一円周上にある。

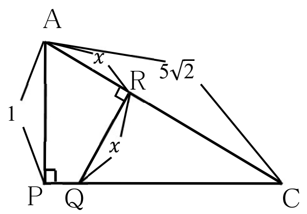
(2)　この円において弧 AC に対し円周角の定理より　∠APC=90°

また(1)の結果より 4 点 A，P，Q，R を通る円を T とすると，AQ は円 T の直径となる。

よって，∠ARQ=∠APQ=90°　∠BAC=∠QAR=45°　より　∠AQR=45°

△AQR は∠ARQ=90°，∠RAQ=∠RQA=45°　の直角三角形である。

(3)



左の図において　AR=RQ=x とおくと，

△APC は直角三角形なので三平方の定理より

$PC^2+1^2=(5\sqrt{2})^2$　よって　PC=7

△CRQ ∽ △CPA (2 角相等)より

RC=7x　つまり　AC=8x

$5\sqrt{2}=8x$　　$x=\frac{5}{8}\sqrt{2}$　即ち　QR=$\frac{5}{8}\sqrt{2}$

5 (20 点)

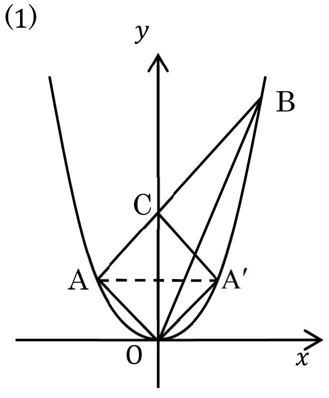
原点を O とする座標平面上に，関数 $y=2x^2$ のグラフがあり，そのグラフ上に 2 点 A，B がある。また，直線 OA の傾きは -2 であり，直線 AB の傾きは 2 である。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 2 点 A，B の座標を求めよ。

(2) △OAB を y 軸の周りに 1 回転させたときにできる立体の体積を求めよ。

(1)



OA: $y=-2x$　と $y=2x^2$　を連立させて，

$2x^2=-2x$　∴　$x(x+1)=0$　よって，$x=0,-1$

A の x 座標は負なので，A$(-1, 2)$

直線 AB は，$y=2x+4$

同様に $y=2x^2$ と連立させて，$2x^2=2x+4$

∴ $(x-2)(x+1)=0$　∴　$x=-1, 2$

B の x 座標は正なので，B$(2, 8)$

(2)　点 A の y 軸についての対称点を A′ とすると，A′$(1, 2)$。

AB と y 軸の交点を C とすると，C$(0, 4)$。直線 A′C は，$y=-2x+4$，

OB は $y=4x$，OB と A′C の交点を D とすると，D の座標は $y=-2x+4$ と $y=4x$

を連立させて，$4x=-2x+4$　∴ $x=\frac{2}{3}$　よって，D$\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$

三角形 OAC の回転体　$\pi\cdot1^2\cdot4\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\pi$

三角形 OBC の回転体　$\pi\cdot2^2\cdot8\cdot\frac{1}{3}-\pi\cdot2^2\cdot4\cdot\frac{1}{3}=\frac{16}{3}\pi$

三角形 ODC の回転体　$\pi\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot4\cdot\frac{1}{3}=\frac{16}{27}\pi$

求める立体の体積は，$\frac{4}{3}\pi+\frac{16}{3}\pi-\frac{16}{27}\pi=\frac{164}{27}\pi$

受験番号		小計		合計	