

# 数学 問題・解答用紙 <No.1>

1 (40点)

次の  をうめよ。

(1) 方程式  $\frac{3}{2}x^2 - x = 2x^2 + 2x - \frac{1}{2}$  の解は  $x =$   である。

(2)  $\sqrt{2020}$  の小数部分を  $p$  とすると、 $p^2 + 88p$  の値は  である。

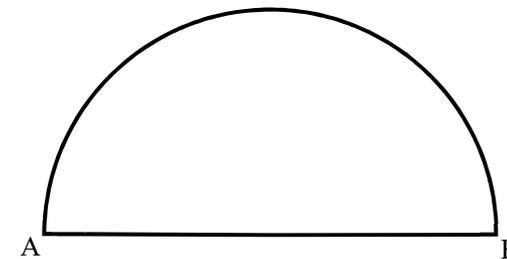
(3)  $xy$  平面上の 3 本の直線  $l: y = x + 4$ ,  $m: y = -x$ ,  $n: x = \sqrt{2}$  を考える。

$l, m, n$  によって囲まれた三角形の面積は  である。

(4) 長さが 10 である線分  $AB$  を直径とする半円があり, この半円の弧上(両端の  $A, B$  は除く)を点  $P$  が動くものとする。また, 半円の外部で, 半直線  $BP$  上に  $\angle PAQ = 60^\circ$  をみたす点  $Q$  をとる。

このとき,  $\angle AQB$  の大きさは  である。また, 線分  $AB$  の中点を

$M$  とするとき, 線分  $MQ$  の長さの最大値は  である。

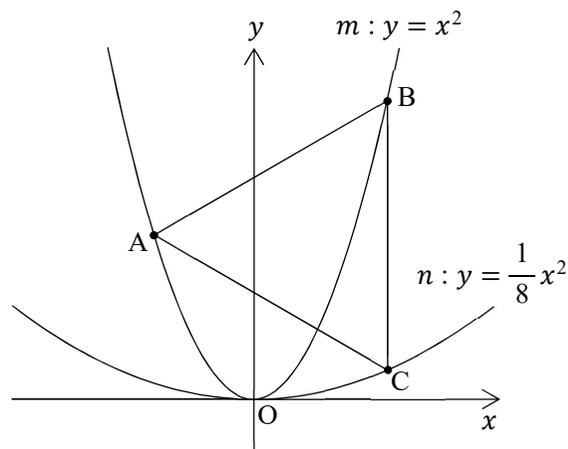


受験 番号		小 計	
----------	--	--------	--

## 数学 問題・解答用紙 <No.2>

**2** (15点)

図のように、2つの放物線  $m: y = x^2$ ,  $n: y = \frac{1}{8}x^2$  がある。2点 A, B を  $m$  上にとり、点 C を  $n$  上にとる。ただし、A の  $x$  座標は負、B の  $x$  座標は正であり、2点 B, C の  $x$  座標は等しいとする。次の問いに答えよ。



- (1) B の  $x$  座標を  $t$  とする。三角形 ABC が  $AB = AC$  の二等辺三角形となるとき、A の座標を  $t$  を用いて表せ。
- (2) 三角形 ABC が正三角形となるとき、B の座標を求めよ。

(1)  $B(t, t^2)$ ,  $C(t, \frac{1}{8}t^2)$  と表せる。A の  $y$  座標は BC の中点と等しいから

$$y = \frac{1}{8}t^2 + \left(t^2 - \frac{1}{8}t^2\right) \div 2 = \frac{9}{16}t^2$$

A は  $m$  上の点だから  $\frac{9}{16}t^2 = x^2$  とすると

$$x < 0, t > 0 \text{ だから } x = -\frac{3}{4}t$$

よって  $A\left(-\frac{3}{4}t, \frac{9}{16}t^2\right)$

(2) BC の中点を M とすると、 $AM : BM = \sqrt{3} : 1$  だから

$$\left(t + \frac{3}{4}t\right) : \left(\frac{9}{16}t^2 - \frac{1}{8}t^2\right) = \sqrt{3} : 1$$

$$\frac{7}{4}t : \frac{7}{16}t^2 = \sqrt{3} : 1$$

$t > 0$  だから  $4 : t = \sqrt{3} : 1$

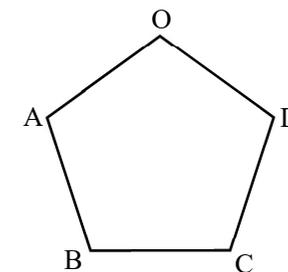
$$\sqrt{3}t = 4$$

$$t = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$B\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{16}{3}\right)$$

**3** (15点)

正五角形 OABCD と、その頂点を反時計回りに動く3点 P, Q, R がある。P, Q, R は、初め頂点 O にあり、さいころを3回振って、1回目に出た目の数だけ P を、2回目に出た目の数だけ Q を、3回目に出た目の数だけ R を移動させる。次の問いに答えよ。



- (1) P, Q, R が3点とも重なるような目の出方は何通りあるか。
- (2) P, Q, R が三角形の3頂点とならないような目の出方は何通りあるか。

(1) ・ A で重なるとき

3回とも、1か6の目が出るときで、

$$2^3 = 8 \text{ 通り}$$

・ A 以外で重なるとき

3回とも2, 3, 4, 5のいずれかの同じ目が出るときで、

$$1 \times 4 = 4 \text{ 通り}$$

合わせると、  $8 + 4 = 12$  通り

(2) 三角形ができる場合を考える

P, Q, R が異なる3点に移動するときだから、

3回とも異なる目が出る、かつ、1と6が出るときはどちらか一方だけという場合である

3回とも異なる目が出る場合は  $6 \times 5 \times 4 = 120$  通り

このうち、1と6の両方が出る場合は、1と6以外の目の選び方4通りで、

3つの目が何回目に出るかの並び方が  $3 \times 2 \times 1 = 6$  通りだから、

$$4 \times 6 = 24 \text{ 通り}$$

よって、三角形ができる場合は  $120 - 24 = 96$  通り

目の出方は全部で  $6^3$  通りだから、三角形ができない場合は、

$$6^3 - 96 = 120 \text{ 通り}$$

受験  
番号

小  
計

# 数学 問題・解答用紙 <No.3>

4 (15点)

70 以上 100 以下の整数について、次の問いに答えよ。

- (1) 正の約数の個数が 2 個であるものをすべて求めよ。(答えのみでよい)
- (2) 正の約数の個数が 12 個であるものをすべて求めよ。

(1)

71, 73, 79, 83, 89, 97

(2)

12 は、いくつかの自然数の積で表すと、

$$6 \times 2, \quad 4 \times 3, \quad 3 \times 2 \times 2$$

と表せる

よって、 $p, q, r$  を異なる素数とすると、条件をみたすもので、

$p^{11}$  の形であらわされるものはなく、

$p^5 \times q$  の形であらわされるものは、

$$2^5 \times 3 = 96$$

$p^3 \times q^2$  の形であらわされるものは、

$$2^3 \times 3^2 = 72$$

$p^2 \times q \times r$  の形であらわされるものは、

$$2^2 \times 3 \times 7 = 84$$

$$3^2 \times 2 \times 5 = 90$$

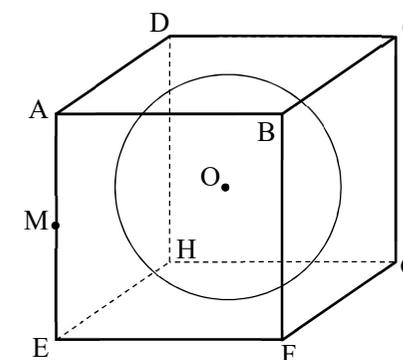
である

以上より、

$$72, 84, 90, 96$$

5 (15点)

一辺の長さが 4 の立方体 ABCD-EFGH のすべての面に接する球がある。辺 AE の中点を M、球の中心を O とする。次の問いに答えよ。



- (1) 五面体 ABCFM の体積を求めよ。
- (2) 三角形 CFM の面積を求めよ。
- (3) 四面体 OCFM の体積を求めよ。

(1)

底面が四角形 ABFM の四角すい C-ABFM の体積と考えると、

$$\frac{(2+4) \times 4}{2} \times 4 \times \frac{1}{3} = 16$$

(2)

$$FM = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}, \quad CF = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}, \quad CM = \sqrt{2^2 + (4\sqrt{2})^2} = 6$$

F から直線 CM に下ろした垂線の足を K とし、 $MK = x$  とすると、

$$FK^2 = (2\sqrt{5})^2 - (6-x)^2 = (4\sqrt{2})^2 - x^2$$

$$\text{これを解くと } x = 4 \text{ だから, } FK^2 = (4\sqrt{2})^2 - 2^2 = 16$$

$$\text{よって, } FK = 4 \text{ だから, } \triangle CFM = 6 \times 4 \div 2 = 12$$

(3)

直線 CE 上に点 O があるので、三角すい C-FME の体積を  $V_1$ 、

三角すい O-FME の体積を  $V_2$  とすると、求める体積は

$$V_1 - V_2 = 2 \times 4 \times \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{1}{3} - 2 \times 4 \times \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

受験  
番号

小  
計

合  
計