数学　問題・解答用紙　＜No.1＞

1　（40 点）

次の ☐ をうめよ。

(1)　$4x^2-9y^2+18y-9$　を因数分解すると $\boxed{(2x+3y-3)(2x-3y+3)}$ である。

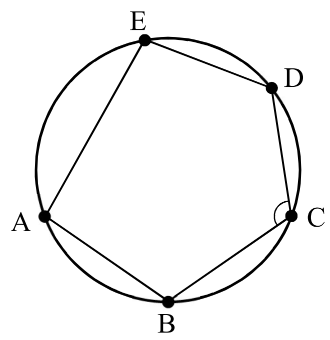
(2)　連立方程式 $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=1 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{3y}{5}=2 \end{cases}$ の解は $x=\boxed{\dfrac{15}{4}}$，$y=\boxed{-\dfrac{5}{4}}$ である。

(3)　正方形 X の 1 辺の長さを 4 大きくしてできる正方形の面積は，正方形 X の 1 辺の長さを 1 大きくしてできる正方形の面積の 3 倍より 15 だけ小さくなる。

この正方形 X の 1 辺の長さは $\boxed{\dfrac{1+\sqrt{57}}{2}}$ である。

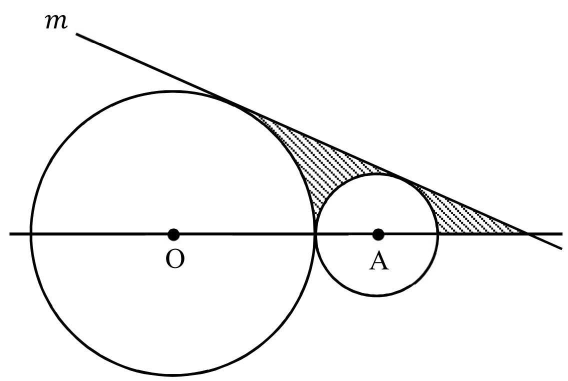
(4)　AB =BC，CD = DE の 5 角形 ABCDE が図のように円に内接している。

$\angle ACE = 50°$ のとき，$\angle BCD = \boxed{115}°$ である。



(5)　図のように，中心が O で半径が 3 の円と中心が A で半径が 1 の円が接していて，直線 m は 2 つの円に接している。

このとき，図の斜線部分の面積は $\boxed{\dfrac{9\sqrt{3}}{2}-2\pi}$ である。



受験番号		小計	

数学　問題・解答用紙　＜No.2＞

2　(15 点)

a を正の定数とする。y軸上に点 $A(0,\ a-2)$ がある。放物線 $y=ax^2$ …① と直線 $y=ax$ の交点のうち，原点 O とは異なる点を B とする。△OAB が OA = OB の二等辺三角形となるとき，次の問いに答えよ。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　直線 AB に関して原点 O と同じ側に，①上の点 C をとる。ただし，C は原点とは異なる点とする。△ABC の面積が△OAB の面積と等しくなるとき，C の座標を求めよ。

(1)　$y=ax$ を①に代入して

$$ax^2=ax$$
$$ax(x-1)=0$$
$$x=0,\ 1$$

B は原点と異なるから B のx座標は$x=1$。よって，$B(1,a)$ 。

OA = OB より $OA^2=OB^2$ だから。

$$(a-2)^2=1^2+a^2$$
$$4a=3$$
$$a=\frac{3}{4}$$

これは，$a>0$ をみたす。

(2) O を通って AB に平行な直線を ℓ とすると，ℓ と①の交点が C である。

(1) より

$$A\left(0,-\frac{5}{4}\right),\ B\left(1,\frac{3}{4}\right)$$

AB の傾きは 3

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right)\div(1-0)=2$$

よって，ℓ の式は

$$y=2x \quad \cdots③$$

また，(1) より ①の式は

$$y=\frac{3}{4}x^2 \quad \cdots④$$

③を④に代入して

$$2x=\frac{3}{4}x^2$$
$$x(3x-8)=0$$
$$x=0,\frac{8}{3}$$

C は原点と異なるから C のx座標は

$$x=\frac{8}{3}$$

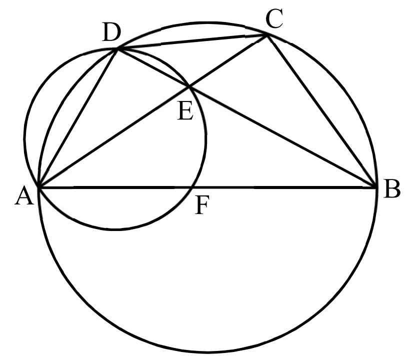
したがって，

$$C\left(\frac{8}{3},\frac{16}{3}\right)$$

3　(15 点)

図のように，四角形 ABCD が辺 AB を直径とする円に内接している。2 つの対角線 AC，BD の交点を E とし，△AED の外接円と辺 AB の交点のうち A ではない方を F とする。

次の問いに答えよ。



(1)　△AFE ∽ △ACB を証明せよ。

(2)　AB=5 であるとき，AC × AE ＋ BD × BE の値を求めよ。

(1) △AFE と △ACB で，共通の角だから

$$\angle EAF=\angle BAC \quad \cdots①$$

一方，AB は図の大円の直径だから

$$\angle ACB=\angle ADB=90^\circ$$

よって，$\angle ADE=90^\circ$ だから AE は図の小円の直径である。

したがって，

$$\angle AFE=90^\circ=\angle ACB \quad \cdots②$$

①，②より，△AFE と △ACB は二組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle AFE \backsim \triangle ACB$$

(2) (1) より △AFE ∽ △ACB だから

$$AE:AB=AF:AC$$
$$AC\times AE=AB\times AF \quad \cdots③$$

△BFE と △BDA で

$$\angle BFE=\angle BDA=90^\circ,\quad \angle EBF=\angle ABD$$

よって，二組の角がそれぞれ等しいから △BFE ∽ △BDA 。しがって，

$$BE:BA=BF:BD$$
$$BD\times BE=BA\times BF \quad \cdots④$$

③，④より

$$AC\times AE+BD\times BE=AB\times AF+BA\times BF$$
$$=AB\times(AF+BF)=AB\times AB=5\times5=25$$

受験番号		小計	

数学　問題・解答用紙　＜No.3＞

4　(15 点)

正七角形 F について，次の問いに答えよ。

(1)　対角線の本数を求めよ。

(2)　頂点を結んでできる三角形のうち，F と辺を共有しないものの個数を求めよ。

(3)　頂点以外の 1 点で 3 本の対角線が交わることはない。これをふまえて，頂点以外での対角線の交点の個数を求めよ。

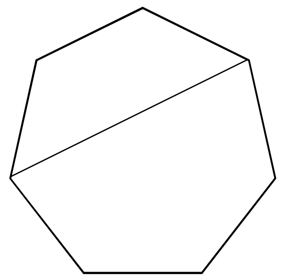
(1) 頂点 2 個に対して対角線か辺が 1 本定まる。

7 個の頂点から 2 個の頂点を選ぶ選び方は

$$\frac{7\times6}{2\times1}=21\ \text{通り}$$

このうち，F の辺となるものが 7 通りあるから，対角線は

$$21-7=14\ \text{本}$$



(2) 頂点 3 個に対して三角形が 1 個定まる。

7 個の頂点から 3 個の頂点を選ぶ選び方は

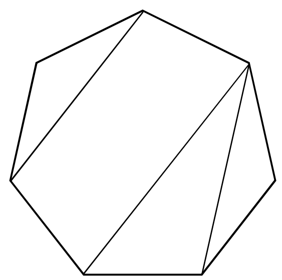
$$\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35\ \text{通り}$$

このうち，F と 2 辺を共有するものが 7 通りあり，

1 辺のみを共有するものは辺ごとに 3 通りずつある。

よって，条件をみたす三角形は

$$35-7-3\times7=7\ \text{個}$$



(3)

3 本の対角線が頂点以外の 1 点で交わることはないから，

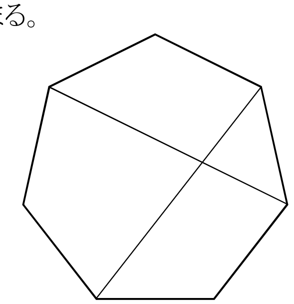
頂点以外で交わる 2 本の対角線 1 組に対して，対角線の交点が 1 個定まる。

また，頂点 4 個に対して，交わる対角線 2 本が 1 組定まる。

7 個の頂点から 4 個の頂点を選ぶ選び方は

$$\frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}=35\ \text{通り}$$

よって，対角線の交点は 35 個



5　(15 点)

各辺の長さが 6 で，底面を正方形 ABCD とする正四角すい O-ABCD がある。辺 AB，BC の中点をそれぞれ M，N とする。また，辺 OA 上に点 P を $OP:AP=2:1$ となるようにとり，辺 OC 上に点 Q を $OQ:CQ=2:1$ となるようにとる。この正四角すい O-ABCD を 3 点 P，M，N を通る平面で切ってできる切り口の図形を X とする。

次の問いに答えよ。

(1)　PQ の長さを求めよ。解答欄には答えのみを記しなさい。

(2)　図形 X の面積を求めよ。

(1)　$PQ=4\sqrt{2}$　（AC は 1 辺が 6 の正方形の対角線だから，$AC=6\sqrt{2}$

$OP:PA=OQ:QC=2:1$ より $AC//PQ$ で $PQ=4\sqrt{2}$ ）

(2) P，M，N を通る平面と辺 OD との交点を R とする。X は五角形 RPQNM である。

PQ の中点を S，MN の中点を T とし，O から底面に下した垂線の足を H とする。

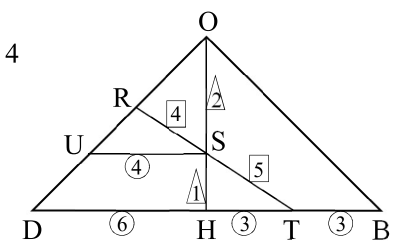
H は BD の中点，T は BH の中点，S は OH と RT の交点になる。

BD に平行で S を通る直線と OD の交点を U とする。

$$DH:US=OH:OS=OA:OP=3:2$$

$$RT:RS=DT:US=\frac{3}{2}DH:US=9:4$$

$$RS:ST=4:5$$

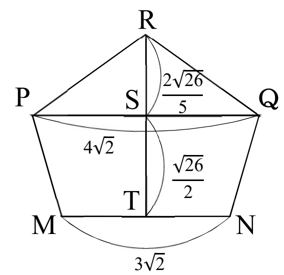


$BD=6\sqrt{2}$ だから，各部分の長さは

$$OH=BH=3\sqrt{2},\quad MN=3\sqrt{2}$$

$$SH=\frac{1}{3}OH=\sqrt{2},\quad TH=\frac{1}{2}BH=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$ST=\sqrt{2+\frac{9}{2}}=\frac{\sqrt{26}}{2},\quad RS=\frac{4}{5}ST=\frac{2\sqrt{26}}{5}$$



三角形 RPQ と台形 MNQP に分けて考えると，X の面積は

$$4\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{26}}{5}\times\frac{1}{2}+\left(3\sqrt{2}+4\sqrt{2}\right)\times\frac{\sqrt{26}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{51}{10}\sqrt{13}$$

受験番号		小計		合計	